Anné universitaire 2018-2019
Session d'Automne 2018

Université IBN TOFAÏL

Ecole Nationale
Des
Sciences appliquées

Cycle préparatoire

Semestre 3

Cours de Calcul différentiel

Fiche 1:
Normes et distances

Pr. Ch. Bensouda

Chapter 1 Espaces vectoriels normés, métriques et topologies associées:

1.1 Introduction et notations:

- Le corps $\mathbb{K}$ désignera soit $\mathbb{R}$ le corps des réels soit $\mathbb{C}$ le corps des complexes.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on a alors:

- La loi interne

$$\begin{array}{rcl} (+) & : & E \times E \longrightarrow E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

- La loi externe

$$\begin{array}{rcl} (.) & : & \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$$

1.2 Espaces vectoriels normés:

1.2.1 Définitions et exemples:

Définition:

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

- On appelle norme sur E toute application

$$\begin{array}{rcl} N & : & E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array}$$

vérifiant:

- La séparation*:*

$$N(x) = 0 \text{ ssi } x = 0,$$

- L'homogénéité*:*

$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \ , \ x \in E \ , \ \lambda \in \mathbb{K}$$

- L'inégalité triangulaire*:*

$$N(x + y) \leq N(x) + N(y) \ , \ x, y \in E.$$

- Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ muni d'une norme N sera dit espace vectoriel normé et sera noté (E, N).

Notations et remarques:

Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

- La norme N est souvent notée

$$\|x\|_E := N(x) \in \mathbb{R}_+ \ ; \ x \in E.$$

- Et l'espace vectoriel normé $(E, \|-\|_E)$ vérifiant l'inégalité

$$|\|x\|_E - \|y\|_E| \leq \|x - y\|_E \ ; \ x, y \in E.$$

1.2.1.1 Normes équivalentes:

Définition:

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

- Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites équivalentes s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x) \ ; \ x \in E.$$

1.3 Normes et métriques associées:

1.3.1 Définitions et exemples:

Définition:

Soit E un ensemble non vide.

Une distance est une application

$$\begin{array}{rcl} d & : & E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) \end{array}$$

vérifiant:

- La séparation:

$$d(x,y) = 0 \text{ ssi } x = y,$$

- La symétrie:

$$d(x,y) = d(y,x) \ , \ x, y \in E$$

- L'inégalité triangulaire:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \ , \ x, y, z \in E.$$

- Un ensemble non vide E muni d'une distance est dit espace métrique.

Proposition:

Soit $(E, \|-\|_E)$, un espace vectoriel normé.

- L'application

$$\begin{array}{rcl} dis_E & : & E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & dis_E(x,y) := \|x-y\|_E \end{array}$$

est une distance sur l'ensemble E

- L'espace (E, dis_E) est un espace métrique.

1.3.2 Espaces de dimensions infinies:

Soit S un ensemble non vide.

- L'espace vectoriel des applications de S dans $\mathbb{K}$ est noté

$$\mathcal{F}(S, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^S.$$

- Le sous espace des applications bornées sur S noté

$$\mathcal{F}_b(S,\mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathbb{K}^S \ / \ \left(\sup_{t\in s} |f(t)| \right) \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

est muni de la norme dite de la convergence uniforme

$$\begin{array}{rcl} \|-\|_\infty & : & \mathcal{F}_b(S,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \|f\|_\infty := \left(\sup_{t\in s} |f(t)| \right) \end{array}$$

et on a l'espace vectoriel normé

$$\left(\mathcal{F}_b(S,\mathbb{K}), \|-\|_\infty \right)$$

- Si $S = \mathbb{Z}$; l'espace des suites bornées

$$l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K}) := \left\{ (u_k)_k \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} / \left(\sup_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| \right) \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

est muni de la norme

$$\begin{array}{rcl} \|-\|_\infty & : & l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ u & = & (u_k)_k \longmapsto \|u\|_\infty := \left(\sup_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| \right) \end{array}$$

et on obtient l'espace vectoriel normé

$$\left(l^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K}), \|-\|_\infty \right).$$

- Pour tout $p \geq 1$; l'espace des séries $p-$sommables

$$l^p(\mathbb{Z},\mathbb{K}) = \left\{ (u_k)_k \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} / \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|^p \right) \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

est muni de la norme

$$\begin{array}{rcl} \|-\|_p & : & l^p(\mathbb{Z},\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ u & = & (u_k)_k \longmapsto \|u\|_p := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{array}$$

et on obtient l'espace vectoriel normé

$$\left(l^p(\mathbb{Z},\mathbb{K}), \|-\|_p \right).$$

1.3.3 Espaces de dimensions finies(l'espace $\mathbb{K}^d$):

L'espace $\mathbb{K}^d$ est l'espace vectoriel de dimension d sur le corps de base $\mathbb{K}$ rapporté à la base canonique

$$\{e_1, e_2, ---, e_d\}$$

où le vecteur

$$e_j = \left(\delta_j^1, \delta_j^2, ..., \delta_j^d\right) \in \mathbb{K}^d$$

tel que

$$\delta_j^k = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{array} \right. .$$

- Un vecteur $x \in \mathbb{R}^d$ s'écrit de manière unique

$$x = (x_1, x_2, ..., x_d) = \sum_{k=1}^{d} x_k e_k$$

- L'espace $\mathbb{K}^d$ est muni de deux lois l'une interne notée $(+)$ et l'autre externe notée $(\cdot)$

- La loi de composition interne $(+)$ est donnée par

$$x + y = \left((x_1 + y_1), (x_2 + y_2), ..., (x_d + y_d)\right).$$

- La loi externe $(.)$ est donnée par

$$\lambda \cdot x = \left((\lambda x_1), (\lambda x_2), ..., (\lambda x_d)\right).$$

1.3.4 Exemples de normes et de distances associées:

- L'espace vectoriel produit $\mathbb{K}^d$ de dimension d; est muni de la norme

$$\|x\|_\infty = \left(\max_{1 \leq j \leq d} |x_j|\right) \quad ; \; x \in \mathbb{K}^d$$

dont la distance associée est donnée par

$$dis_\infty (x, y) := \left(\max_{1 \leq j \leq d} |x_j - y_j|\right) \quad ; \; x, y \in \mathbb{K}^d$$

- Pour tout $p \geq 1$, de la norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad ; \; x \in \mathbb{K}^d$$

vérifiant les inégalités

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \left(d^{\frac{1}{p}}\right) \|x\|_\infty \quad ; \; x \in \mathbb{K}^d.$$

Et dont la distance associée est donnée par

$$dis_p (x, y) := \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j - y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad ; \; x, y \in \mathbb{K}^d$$

- En particulier; l'application

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|\right) \quad ; \; x \in \mathbb{K}^d$$

est une norme sur $\mathbb{K}^d$ dont la distance associée est donnée par

$$dis_1(x,y) := \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j - y_j|\right) \quad ; \ x, y \in \mathbb{K}^d$$

- Et l'application

$$\|x\|_2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{d} x_k^2}\right) \quad ; \ x \in \mathbb{K}^d$$

est la norme euclidienne sur $\mathbb{K}^d$ dont la distance euclidienne associée est donnée par

$$dis_2(x,y) := \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{d} |x_j - y_j|^2}\right) \quad ; \ x, y \in \mathbb{K}^d$$

Remarque:
- Nous avons les inégalités suivantes

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq d\,\|x\|_\infty \ ; \ x \in \mathbb{K}^d.$$

1.4 Topologies associées:

1.4.1 Notations:

Soient $(E, \|-\|)$, un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$.

- On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B(a,r) = \{x \in E \ / \ \|x - a\| < r\}.$$

- On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B_f(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \ / \ \|x - a\| \leq r\right\}.$$

1.4.2 Définitions:

Définitions:

Soit $(E, \|-\|)$, un espace vectoriel normé.

- *Une partie U de E est dite ouverte si U est vide ou bien, pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que*

$$B(x,r) \subseteq U.$$

- *Une partie F de E est dite fermée si son complémentaire dans E, noté $(E \backslash F)$, est une partie ouverte dans E.*

Remarques:

- Toute boule ouverte est une partie ouverte et toute boule fermée est une partie fermée.
- L'ensemble vide $\emptyset$ et l'espace E tout entier sont, tous les deux à la fois ouverts et fermés.

- Une intersection finie d'ouverts reste ouverte.
- Une réunion quelconque d'ouverts reste ouverte.
- Une réunion finie de fermés reste fermée.
- Une intersection quelconque de fermés reste fermée.

Proposition:

Soit E, un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

- Deux normes équivalentes sur E définissent les mêmes partie ouvertes.

Définition:

Soit $(E, \|-\|)$, un espace vectoriel normé.

- Pour tout $a \in E$; une partie V de E est dite un voisinage de a dans E s'il existe

$$r > 0 \text{ tel que } B(a, r) \subseteq V.$$

Remarques:

Soit $(E, \|-\|)$, un espace vectoriel normé.

- Si V est un voisinage de a alors nécessairement

$$a \in V \text{ et par conséquent } V \neq \emptyset\ .$$

- Une partie W qui contient un voisinage de a reste un voisinage de a.

Propriété caractéristique:

Soit $(E, \|-\|)$, un espace vectoriel normé.

- Une partie U de E est ouverte si, et seulement si, U est voisinage de chacun de ces points.

Définition:

Soit $(E, \|-\|)$, un espace vectoriel normé et A une partie de E.

- On appelle intérieur de A le plus grand ouvert contenu dans A et noté

$$A^o = \left(\bigcup_{A \supseteq U \ ouvert} U \right).$$

- On appelle fermeture de A et le plus petit fermé contenant A et noté

$$\overline{A} = \left(\bigcap_{A \subseteq F \ ferm\acute{e}} F \right).$$